

Der Einfluß magnetischer Felder auf die Torsionsscherung von MBBA

Th. Waltermann und F. Fischer *

Physikalisches Institut der Westfälischen Wilhelms-Universität Münster

(Z. Naturforsch. 30 a, 519–527 [1975]; eingegangen am 26. Februar 1975)

Torsional Shear Flow of MBBA in Magnetic Fields

Quantitative results are reported on the influence of a homogeneous magnetic field upon the torsional shear flow of a homeotropic layer at 22.5 °C. In subcritical fields H_x parallel to the layer, as well as in weak fields H_z normal to the layer, one gets $K_3/\mu_0 \chi_a = 3.76 \pm 0.2 \text{ A}^2$. In oblique magnetic fields ($H_x, 0, H_z$) one obtains $(\lambda_2 - \lambda_1)/\mu_0 \chi_a = (11.7 \pm 0.4) \times 10^{10} \text{ A}^2 \text{ m}^{-2} \text{ s}$. In addition, a hysteresis effect in supercritical fields H_x and the formation of a long and straight magnetic wall are described. The magnetic wall becomes distorted under the action of the shear flow. Hereby a new domain can be produced which has a 180° inversion wall parallel to the boundaries of the layer.

§ 1 Einleitung

Das übliche Verfahren, Kombinationen von elastischen Konstanten und magnetischer Anisotropie eines nematischen flüssigen Kristalls zu messen, ist die Deformation einer dünnen einkristallinen nematischen Schicht durch ein Magnetfeld¹. Viskositätskonstanten erhält man aus Untersuchungen des Scherflusses² oder des Kapillarflusses^{3,4}. Dabei wird eine definierte Orientierung des Flüssigkristalls durch ein sehr starkes Magnetfeld erzwungen. Die Messung der Kombination von elastischen und viskosen Konstanten ist erstmalig durch die Torsionsscherung einer homöotropen Schicht gelungen⁵. Hierbei werden die Grenzflächen der ebenen Schicht mit konstanter Torsionsfrequenz ω gegeneinander verdreht. Im telezentrischen Strahlengang beobachtet man die ortsabhängige Anisotropie der zwischen gekreuzten Polarisatoren befindlichen Scherzelle. Es erscheint ein Interferenzmuster in Form konzentrischer Kreise (Abbildung 1 a).

Bringt man diese Scherzelle in ein homogenes Magnetfeld, dessen Stärke nicht zur vollkommenen Orientierung der nematischen Schicht führt, dann dürften die Kombinationen dreier Konstanten meßbar sein. Es sind dies elastische Konstanten, Viskositätskonstanten und die magnetische Anisotropie χ_a . Dies soll wegen der bereits vorliegenden umfangreichen Meßdaten zunächst am Flüssigkristall MBBA bei Raumtemperatur (22,5 °C) gezeigt werden.

Aus Gründen der durch die homöotrope Ausgangsorientierung und die Torsionsscherung gegebenen Symmetrie wollen wir drei Hauptorientierungen des Magnetfeldes zur nematischen Schicht wählen: Das Magnetfeld H_z senkrecht zur Schicht, das Magnetfeld H_x parallel zur Schicht oder das schiefe Magnetfeld ($H_x, 0, H_z$). Welche Effekte darf man in diesen drei Anordnungen erwarten?

Das senkrechte Magnetfeld H_z ist bestrebt, die durch Torsionsscherung verursachte Deformation der Schicht zu verringern ($\chi_a > 0$). Es wird also versuchen, die homöotrope Orientierung wiederherzustellen.

Das parallele Magnetfeld H_x sollte die durch die Torsionsscherung erzeugte Deformation verstärken. Bei Umkehr der Scherrichtung im überkritischen H_x dürfte die durch das Magnetfeld gehaltene Verkipfung des Direktors vermindert werden. Das kann zu Instabilitäten führen. Außerdem verfügen wir bei der Torsionsscherung, im Gegensatz zur einfachen Scherung, über ein zweidimensionales Feld von Schergeschwindigkeiten \mathbf{v} . In zwei Schichthälften haben die Komponenten von \mathbf{v} in Feldrichtung entgegengesetztes Vorzeichen. Das ermöglicht die Bildung einer Twistwand im überkritischen Feld $H_x > H_c$.

Bereits ein schwaches schiefes Magnetfeld ($H_x, 0, H_z$) wird auch ohne Torsionsscherung die homöotrope Schicht deformieren, indem der Direktor sich parallel zum Feld einzudrehen sucht. Eine zusätzliche Torsionsscherung wird diese Verdrehung in der einen Schichthälfte verstärken, in der anderen Schichthälfte abschwächen. Dies kann soweit gehen, daß die durch das Magnetfeld erzeugte optische Anisotropie der Schicht durch das Scherfeld kompen-

* Reprint requests to Physikalisches Institut der Westfälischen Wilhelms-Universität Münster, D-4400 Münster, Schlossplatz 7.



Dieses Werk wurde im Jahr 2013 vom Verlag Zeitschrift für Naturforschung in Zusammenarbeit mit der Max-Planck-Gesellschaft zur Förderung der Wissenschaften e.V. digitalisiert und unter folgender Lizenz veröffentlicht: Creative Commons Namensnennung-Keine Bearbeitung 3.0 Deutschland Lizenz.

Zum 01.01.2015 ist eine Anpassung der Lizenzbedingungen (Entfall der Creative Commons Lizenzbedingung „Keine Bearbeitung“) beabsichtigt, um eine Nutzung auch im Rahmen zukünftiger wissenschaftlicher Nutzungsformen zu ermöglichen.

This work has been digitized and published in 2013 by Verlag Zeitschrift für Naturforschung in cooperation with the Max Planck Society for the Advancement of Science under a Creative Commons Attribution-NoDerivs 3.0 Germany License.

On 01.01.2015 it is planned to change the License Conditions (the removal of the Creative Commons License condition "no derivative works"). This is to allow reuse in the area of future scientific usage.

siert wird und die Schicht an einer Stelle wieder homöotrop wird. Damit dürfte eine unmittelbare Messung des Verhältnisses der magnetischen Anisotropie zu einer Viskositätskonstanten möglich werden.

Eine Auswahl der Interferenzbilder, die bei den drei Hauptmeßanordnungen entstehen, ist bereits an anderer Stelle mitgeteilt worden⁶.

Unser Ziel ist, die Interferenzbilder quantitativ auszuwerten. Hierfür müssen wir die hydrodynamischen Grundgleichungen unter Einbezug der magnetischen Terme in eine für die gewählte Geometrie passende Form bringen. Gegebenenfalls sind Näherungslösungen zu suchen, damit eine einfache Auswertung der Meßpunkte ermöglicht wird.

Ergänzend zeigen wir weitere typische Interferenzbilder, die bei der Verformung einer geraden Twistwand entstehen. Bei dieser Wandverformung kann auch eine besondere Domäne mit einer 180°-Inversionswand parallel zu den Grenzflächen entstehen. Ihre Eigenschaften sollen qualitativ beschrieben werden.

§ 2 Experimentelles Verfahren

Das Kernstück der horizontalen Scherzelle sind zwei kreisrunde, polierte Glasplatten (ϕ 40 bzw. 44 mm). Ihre einseitig optisch planen Flächen sind auf $1 \mu\text{m}$ genau parallel. Sie begrenzen die nematische Schicht in homöotroper Ausgangsorientierung. Die untere Platte wird gegenüber der oberen um eine vertikale Achse tordiert. Zwischen $\omega = 5,4 \cdot 10^{-5} \text{ s}^{-1}$ und $\omega = 5,4 \cdot 10^{-2} \text{ s}^{-1}$ können zehn verschiedene konstante Torsionsfrequenzen gewählt werden. Jede gewünschte Dicke der nematischen Schicht lässt sich bis zu einer maximalen Schichtdicke von 1 mm auf $2 \mu\text{m}$ genau einstellen. Der zur Justierung und zur Torsion der Glasplatten verwendete mechanische Aufbau ist ähnlich dem von Wahl und Fischer⁵ beschriebenen. Es ist jedoch jegliches ferromagnetisches Material vermieden worden. Anstelle von Stahlkugellagern haben sich Gleitlager bewährt.

Das horizontale Magnetfeld H_x wird von einem Elektromagneten (Bruker BE-10) mit 10 cm Polschuhdurchmesser geliefert. Die Feldstärke ist kontinuierlich regelbar bis maximal $4,8 \cdot 10^5 \text{ A/m}$. Die relative Abweichung auf dem Umfang der Schicht ist $\pm 3\%$. Ein vertikales Magnetfeld H_z kann zusätzlich zum horizontalen Feld eingeschaltet werden. Hierzu ist eine wassergekühlte Spule (Länge und Durchmesser 8 cm) aus vier Lagen Cu-Draht (Dicke 1,3 mm) über die Scherzelle gestülpt. Bei einer

maximalen Feldstärke $H_z = 6 \cdot 10^4 \text{ A/m}$ werden etwa 1 kWatt an Joulescher Wärme abgeführt, ohne daß die Temperatur der Scherzelle sich ändert. Vom Mittelpunkt der Schicht bis zum Rand nimmt H_z um ca. 7% zu.

Der optische Aufbau ist ähnlich dem bei Wahl und Fischer⁵. Ein Parallelbündel monochromatischen Lichts ($\lambda = 546 \text{ nm}$) fällt senkrecht durch die zwischen gekreuzten Polarisatoren befindliche Flüssigkristallschicht. Ein Objektiv ($f = 10 \text{ cm}$) bildet das Interferenzmuster der Schicht im Verhältnis 1:1 in die Filmebene einer Spiegelreflexkamera ab.

Die nematische Schicht der Scherzelle besteht aus selbst hergestelltem, mehrfach vakuumdestilliertem MBBA. Der Klärpunkt des MBBA liegt zwischen 46,5 und 47 °C. Die Scherzelle ist luftdicht verschlossen. Vor jedem Ansetzen einer neuen Schicht wird sie einmal mit getrocknetem Stickstoffgas gespült. Zur Erzeugung einer homöotropen Ausgangsorientierung werden die Glasplatten vorher mit einer Lösung von Lezithin in Benzol benetzt.

§ 3 Theoretische Grundlagen

Die Beschreibung des räumlichen und zeitlichen Verlaufs des Direktors \hat{n} einer im Magnetfeld fließenden nematischen Flüssigkeit ergibt sich aus dem Verschwinden der gesamten Drehmomentendichte $\boldsymbol{\Gamma}(\mathbf{r}, t)$, die sich aus einem elastischen, einem viskosen und einem magnetischen Anteil zusammensetzt⁷. Es gilt:

$$\boldsymbol{\Gamma}(\mathbf{r}, t) = \boldsymbol{\Gamma}^d(\mathbf{r}, t) + \boldsymbol{\Gamma}^v(\mathbf{r}, t) + \boldsymbol{\Gamma}^m(\mathbf{r}, t) = 0. \quad (1)$$

Führt man die Drehmomentendichte auf die Wirkung eines Molekularfeldes \mathbf{h} zurück, dann gilt:

$$\boldsymbol{\Gamma} = \hat{n} \times \mathbf{h}; \quad \text{mit} \quad \mathbf{h} = \mathbf{h}^d + \mathbf{h}^v + \mathbf{h}^m. \quad (2)$$

Der elastische Anteil des Molekularfeldes hat die Form:

$$h_i^d = \partial_j \left(\frac{\partial F^d}{\partial n_{j,i}} \right) - \frac{\partial F^d}{\partial n_i}, \quad (3)$$

wobei

$$F^d = (1/2) [K_1 (\text{div } \mathbf{n})^2 + K_2 (\hat{n} \cdot \text{rot } \hat{n})^2 + K_3 (\hat{n} \times \text{rot } \hat{n})^2] \quad (4)$$

die elastische Energiedichte bedeutet.

Der viskose Anteil des Molekularfeldes lautet:

$$\mathbf{h}^v = \lambda_1 \mathbf{N} + \lambda_2 \mathbf{A} \hat{n}. \quad (5)$$

\mathbf{N} ist die Winkelgeschwindigkeit des Direktors relativ zur Flüssigkeit, die sich mit einer Winkelge-

schwindigkeit ω^* dreht.

$$\mathbf{N} = d\hat{\mathbf{n}}/dt - \omega^* \times \hat{\mathbf{n}} \quad \text{mit} \quad \omega^* = \frac{1}{2} \operatorname{rot} \mathbf{u}. \quad (6)$$

Der symmetrische Tensor

$$A_{ik} = \frac{1}{2} (u_{i,k} + u_{k,i}) \quad (7)$$

beschreibt den Beitrag der Scherung benachbarter Flüssigkeitsschichten unterschiedlicher Geschwindigkeit \mathbf{u} . λ_1 und λ_2 sind Viskositätskonstanten.

Der magnetische Anteil des Molekularfeldes lautet:

$$\mathbf{h}^m = \mu_0 \chi_a (\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{H}) \mathbf{H} \quad (8)$$

mit $\chi_a = \chi_{\parallel} - \chi_{\perp}$ der Anisotropie der magnetischen Suszeptibilität.

Wie man sieht, verschwindet das magnetische Drehmoment für $\hat{\mathbf{n}}_{\parallel} \mathbf{H}$ oder für $\hat{\mathbf{n}}_{\perp} \mathbf{H}$.

In unserem Fall einer stationären Torsionsscherung mit zeitlich konstanter Torsionsgeschwindigkeit $\omega = \omega_z$ und zeitlich konstantem Magnetfeld wird $(\partial \hat{\mathbf{n}} / \partial t) = 0$. Trotzdem bleiben die Gleichungen zur Bestimmung von $\hat{\mathbf{n}}(\mathbf{r})$ noch sehr kompliziert. Solange wir uns jedoch auf hinreichend kleine Schichtdicken und nicht zu große ω beschränken, können Twisteanteile der elastischen Energie vernachlässigt werden. Dann läßt sich die Torsionsscherung an jeder Stelle der Schicht $\mathbf{r} = (x, y, z)$ bei festgehaltenem x - und y -Wert, aber variablem z durch eine einfache Scherung mit der Schergeschwindigkeit $\mathbf{v} = \omega \times \mathbf{r}$ approximieren. Dabei hat \mathbf{r} seinen Ursprung in der Drehachse. Die x - und y -Achse sind zugleich die geeigneten Koordinaten zur späteren Beschreibung des Interferenzbildes. Das als homogen angenommene Magnetfeld sei $\mathbf{H} = (H_x, 0, H_z)$. Für die spätere Auswertung interessieren die Stellen der Schicht mit $x = 0$, wo die Schergeschwindigkeit \mathbf{v} parallel zu $\hat{\mathbf{x}}$ steht. Weiterhin sollen bei gegebenem $v = \omega \cdot y$ der Direktor $\hat{\mathbf{n}} = [\sin \vartheta(z), 0, \cos \vartheta(z)]$ und die Geschwindigkeit $\mathbf{u} = [u(z), 0, 0]$ nicht mehr von x oder y abhängen. In dieser Form berücksichtigt v zugleich die angenommene Inkompressibilität der Flüssigkeit. Als Randbedingung gilt $\vartheta = 0$ für $z = \pm d/2$ und $u = 0$ für $z = -d/2$ sowie $u = v$ für $z = +d/2$. Von der Drehmomentbedingung (1) verschwindet nur die y -Komponente nicht identisch. Sie ergibt

$$\begin{aligned} f(\vartheta) \frac{d^2\vartheta}{dz^2} + \frac{1}{2} \frac{df(\vartheta)}{d\vartheta} \left(\frac{d\vartheta}{dz} \right)^2 \\ + \frac{1}{2} \frac{du}{dz} (\lambda_2 \cos 2\vartheta - \lambda_1) \\ + \frac{1}{2} \mu_0 \chi_a [(H_x^2 - H_z^2) \sin 2\vartheta \\ + 2 H_x \cdot H_z \cos 2\vartheta] = 0. \end{aligned} \quad (9)$$

Hierbei bedeutet $f(\vartheta) = K_1 \sin^2 \vartheta + K_3 \cos^2 \vartheta$. Das Geschwindigkeitsgefälle du/dz in der Schicht ist nicht frei vorgegeben. Vielmehr folgt aus der allgemeinen Kraftgleichung

$$\varrho \cdot \dot{\mathbf{v}} = \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{K}^m \quad (10)$$

($\boldsymbol{\sigma}$ = Spannungstensor; \mathbf{K}^m = magnetische Kraftdichte) eine weitere Beziehung. In unserem Fall gilt:

$$(du/dz) \cdot g(\vartheta) = \text{const}, \quad (11)$$

wobei $g(\vartheta) = \eta_1 \sin^2 \vartheta + \eta_{12} \sin^2 \vartheta \cdot \cos^2 \vartheta + \eta_2 \cos^2 \vartheta$ ist, und $\eta_1, \eta_{12}, \eta_2$ Viskositätskonstanten sind. Das Magnetfeld bewirkt nur eine z -Abhängigkeit des statischen Drucks \mathbf{p} . Dieser ist jedoch bei unseren Versuchen ohne Belang.

Eine Eichtransformation der Gleichungen des einfachen Scherflusses ergibt im Falle einer schlanken Strömung [$(\partial \hat{\mathbf{n}} / \partial x) = (\partial \hat{\mathbf{n}} / \partial y) = 0$], daß die Lösung für $\hat{\mathbf{n}}$ von der Form

$$\hat{\mathbf{n}} = \hat{\mathbf{n}}(z/d, \mathbf{v} d, \mathbf{H} d) \quad (12)$$

ist. In unserem speziellen Fall

$$\hat{\mathbf{n}} = [\sin \vartheta(z), 0, \cos \vartheta(z)]$$

und $\mathbf{v}_{\parallel} \hat{\mathbf{x}}$ gilt dann auch:

$$\vartheta = \vartheta(z/d, \mathbf{v} d, \mathbf{H} d). \quad (13)$$

Damit sieht die mittlere optische Anisotropie folgendermaßen aus:

$$\langle n_{ao}(\vartheta) - n_0 \rangle = \int_0^1 l(\vartheta) d\zeta = L(v d, \mathbf{H} d). \quad (14)$$

Dabei ist $\zeta = 2z/d$. $l(\vartheta)$ wird in Gl. (17) angegeben. Für kleine Schichtdicken und entsprechend der Geometrie unserer Meßanordnung können wir

$$\langle n_{ao}(\vartheta) + n_0 \rangle = d \lambda / d \quad (15)$$

setzen, wobei m die Ordnung der beobachteten Interferenz und λ die Vakuumwellenlänge des verwendeten Lichtes ist. Somit ist

$$m/d = (1/\lambda) L(v d, H_x d, H_z d) \quad (16)$$

die geeignete reduzierte Darstellung der gemessenen Interferenzen.

§ 4 Ergebnisse und Diskussion

Die gewonnenen Meßergebnisse lassen sich in drei Gruppen unterteilen. In der ersten Gruppe wird der Einfluß eines rein horizontalen Feldes H_x bzw. eines rein vertikalen Feldes H_z untersucht. Aus der Dreh-

momentgleichung (9) ist ersichtlich, daß sich beide Fälle nur durch das Vorzeichen im magnetischen Term unterscheiden. H_x soll dabei unterkritisch bleiben. Wird hingegen $H_x > H_c = (\pi/d) \cdot (K_3/\mu_0 \chi_a)^{1/2}$, dann bildet sich eine magnetische Twistwand aus. Dieser Fall wird in der zweiten Gruppe untersucht. Hierbei wird auch eine Hystereserscheinung und die Umwandlung der magnetischen Twistwand in andere Wandformen unter Mitwirkung von Disklinationen behandelt. In der dritten Gruppe soll der Einfluß eines schrägen Magnetfeldes ($H_x, 0, H_z$) besprochen werden.

a) *Unterkritisches Magnetfeld H_x bzw. schwaches Feld H_z*

Ein unterkritisches paralleles Magnetfeld H_x deformiert die Interferenzkreise der Torsionsscherung zu Ellipsen (Abbildung 1b). Die großen Halbachsen der Ellipsen bleiben hierbei konstant; denn dort steht \hat{n} senkrecht auf H_x . Die kleinen Halbachsen liegen auf der y -Achse des Koordinatensystems. Dort wirken magnetisches und viskoses

Drehmoment im gleichen Sinne. Die Länge der kleinen Halbachsen verkürzt sich mit wachsendem H_x .

Ein schwaches senkrechtes Magnetfeld H_z vergrößert den Durchmesser der Interferenzringe, d. h. es vermindert lokal die Anisotropie; denn hier wirken magnetisches und viskoses Drehmoment an jeder Stelle der Schicht gegensinnig.

Bei verschiedenen Schichtdicken d und verschiedenen Parametern $H_x d$ bzw. $H_z d$ haben wir die zu den einzelnen Interferenzordnungen m gehörenden Schergeschwindigkeiten v bestimmt. Die Ordnung m stellt man durch Auszählen, ausgehend von der nullten Ordnung im Zentrum, fest. Die zugehörige Schergeschwindigkeit $v = \omega r$ erhält man, indem unter dem Mikroskop mit einem Mikrometerschlitten der Abstand der jeweiligen Ordnung m vom Zentrum gemessen wird. Um zur Auswertung die Gl. (9) heranziehen zu können, werden die Fotos zum Feld H_x nur entlang der y -Achse ausgewertet, diejenigen zum Feld H_z entlang einer beliebigen Achse. Die Meßgrößen m, r, ω, d, H werden in einen Elektronenrechner gegeben. Ein angeschlossenes Zeichengerät trägt gemäß Gl. (16) in reduzierter Darstellung (m/d) gegen ($v d$) auf. Das ist in Abb. 2 a für kleine $v d$ geschehen. Mit diesem Verfahren sind alle weiteren Diagramme dieser Arbeit erstellt worden.

Diese Meßwerte können weiter ausgewertet werden. Dazu wollen wir m/d für kleine $v d$ in eine

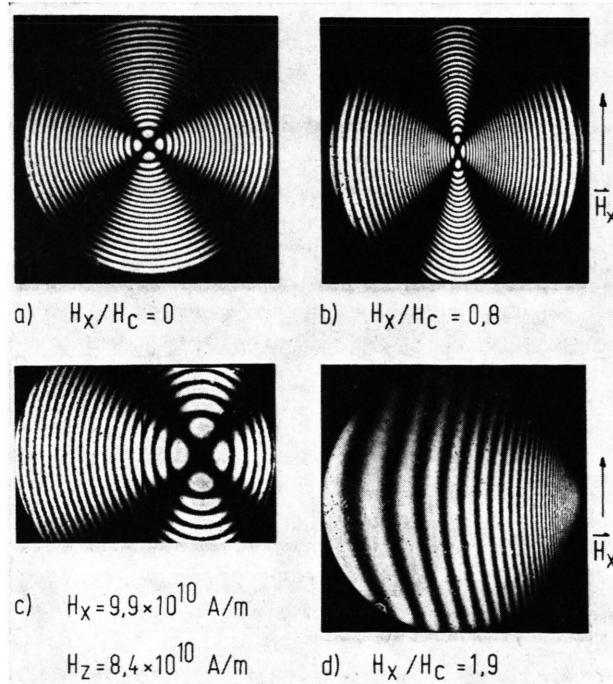


Abb. 1. Einfluß eines horizontalen Magnetfeldes H_x bzw. eines schiefen Feldes ($H_x, 0, H_z$) auf die Interferenzen der Torsionsscherung.

- a), b) $\omega = 2,7 \cdot 10^{-4} \text{ s}^{-1}, d = 150 \mu\text{m}$,
- c) $\omega = 5,4 \cdot 10^{-5} \text{ s}^{-1}, d = 300 \mu\text{m}$,
- d) $\omega = 5,4 \cdot 10^{-3} \text{ s}^{-1}, d = 200 \mu\text{m}$.

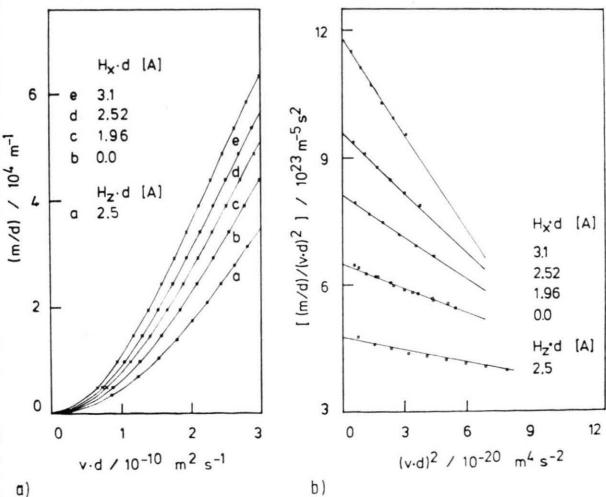


Abb. 2. a) (m/d) im Bereich kleiner ($v d$) mit unterkritischem $H_x d$ bzw. $H_z d$ als Parameter (Magnetfeld H_x parallel zur Schicht, H_z senkrecht zur Schicht, Interferenzordnung m , Schergeschwindigkeit v , Schichtdicke d).

- b) Meßpunkte aus a) in anderer Darstellung zur Ermittlung von a_2 und a_4 [siehe Gleichung (24)].

Potenzreihe entwickeln. Vom Indexellipsoid erhält man:

$$n_{ao}(\vartheta) - n_o = n_{||} \left[\frac{1}{\sqrt{1 - (1 - n_{||}^2/n_{\perp}^2) \sin^2 \vartheta}} - 1 \right] = l(\vartheta). \quad (17)$$

Dabei sind $n_{||}$ und n_{\perp} ($n_{||} < n_{\perp}$) die Hauptbrechungsindizes. Durch Entwicklung bis zur vierten Ordnung in ϑ erhält man daraus die mittlere optische Anisotropie:

$$\langle n_{ao}(\vartheta) - n_o \rangle = n_{||} \left(1 - \frac{n_{||}^2}{n_{\perp}^2} \right) \int_0^1 \left(\frac{\vartheta^2(\zeta)}{2} - \frac{\vartheta^4(\zeta)}{6} \right) d\zeta. \quad (18)$$

Nun soll ϑ als eine Funktion von vd geschrieben werden. Für kleine ϑ machen wir unter Berücksichtigung der homöotropen Randbedingungen und der Symmetrie den bei Wahl und Fischer⁵ eingeführten Ansatz:

$$\vartheta = \vartheta_2(1 - \zeta^2)(1 + \varepsilon \zeta^2). \quad (19)$$

Hierbei bedeutet ϑ_2 die maximale Auslenkung des Direktors (in der Schichtmitte, $\zeta = 0$), und es sei $\varepsilon \ll 1$. Damit wird Gl. (18) integriert und liefert bei Vernachlässigung von quadratischen und höheren Gliedern in ε :

$$\langle n_{ao}(\vartheta) - n_o \rangle = n_{||} \left(1 - \frac{n_{||}^2}{n_{\perp}^2} \right) \left[\left(\frac{4}{15} + \frac{8}{105} \varepsilon \right) \vartheta_2^2 - \left(\frac{64}{945} + \frac{256}{10395} \varepsilon \right) \vartheta_2^4 \right]. \quad (20)$$

Wir berechnen nun ϑ_2 und ε aus Gleichung (9). Hierzu entwickeln wir diese in eine Potenzreihe von ϑ . Da wir $\vartheta \ll 1$ annehmen dürfen, können auch hier quadratische und höhere Glieder in ϑ vernachlässigt werden. Nach Gl. (11) wird somit $(du/dz) = (vd)$. Zur Berechnung der vorkommenden Ableitungen mit dem Ansatz (19) führen wir in Gl. (9) die reduzierte Koordinate $\zeta = 2z/d$ ein. Für die Darstellung dieser Ableitungen als Funktionen von ϑ verwenden wir als inverse Funktion zu Gl. (19) näherungsweise:

$$\zeta^2 = (1 - \vartheta/\vartheta_2)(1 + \varepsilon \vartheta/\vartheta_2). \quad (21)$$

Da die Potenzreihe unabhängig von ϑ identisch verschwindet, gilt dies auch für die Koeffizienten von ϑ^0 und von ϑ^1 . Man findet

$$\vartheta_2(1 - 5\varepsilon) = \tau vd, \quad (22)$$

$$3\varepsilon + \sigma - \kappa \vartheta_2^2(1 + 2\varepsilon) = 0. \quad (23)$$

Dabei ist $\tau = (\lambda_2 - \lambda_1)/16K_3$, $\kappa = (K_3 - K_1)/K_3$ und $\sigma = \mu_0 \chi_a (Hd)^2/16K_3$. σ ist positiv für $H = H_x$ und negativ für $H = H_z$.

Aus Gl. (22) und (23) werden ϑ_2 und ε explizit dargestellt und in Gl. (20) eingesetzt. Daraus erhalten wir m/d in der gewünschten Form als Potenzreihe von vd

$$m/d = a_2(vd)^2 + a_4(vd)^4 + \dots \quad (24)$$

Die Koeffizienten haben folgende Form:

$$a_2 = \frac{4}{15} \alpha \tau^2 (1 - \frac{5}{3} \sigma)^{-2} (1 - \frac{2}{21} \sigma), \quad (25)$$

$$a_4 = -\frac{16}{315} \alpha \tau^4 (1 - \frac{5}{3} \sigma)^{-5} \quad (26)$$

$\cdot [17(1 - \frac{73}{102} \sigma + \frac{5}{153} \sigma^2) \kappa + \frac{4}{3} (1 - \frac{59}{33} \sigma + \frac{20}{99} \sigma^2)]$, wobei zur Abkürzung $\alpha = (n_{||}/\lambda) [1 - (n_{||}^2/n_{\perp}^2)]$ gesetzt worden ist.

Trägt man $(m/d)/(vd)^2$ als Funktion von $(vd)^2$ mit Hd als Parameter auf, so erhält man für hinreichend kleine vd eine Schar von Geraden (Abbildung 2 b). Ihre Ordinatenabschnitte liefern nach Gl. (24) $a_2(Hd)$, ihre Steigungen $a_4(Hd)$. Die eingezeichneten Geraden sind nach Gl. (24) bis (26) berechnet. Hierbei wurden zur optimalen Anpassung folgende Werte eingesetzt:

$$\frac{\lambda_2 - \lambda_1}{K_3} = (3 \pm 0,06) \cdot 10^{10} \text{ m}^{-2} \text{ s},$$

$$\frac{K_1}{K_3} = 0,82 \pm 0,04, \frac{K_3}{\mu_0 \chi_a} = 3,76 \pm 0,2 \text{ A}^2.$$

Diese Konstantenwerte stimmen im Rahmen der Meßgenauigkeit mit anderen Angaben aus der Literatur überein^{1, 5, 8-10}. $n_{||} = 1,556$ und $n_{\perp} = 1,789$ wurden aus Meßdaten von Brunet-Germain¹¹ interpoliert.

b) Hysterese und Wände im überkritischen Magnetfeld H_x

Legt man an die ungescherte Schicht ein überkritisches Magnetfeld H_x an (möglichst vorübergehend mit einer Normalkomponente H_z), so erhält das ganze Gesichtsfeld eine einheitliche optische Anisotropie mit fester Ordnung der Interferenz. Hinzunahme der Torsionsscherung lässt von zwei Seiten Interferenzstreifen höherer bzw. niederer Ordnung hereinlaufen (Abbildung 1 d). Bei konstanter Winkelgeschwindigkeit ω wird das Interferenzbild stationär. Erniedrigt man nun H_x genügend langsam, dann wandert quasistatisch das System der Interferenzstreifen. Dabei verschwinden

die höheren Ordnungen und niedere Ordnungen kommen neu herein, bis die Schicht am Randpunkt mit der niedrigsten Ordnung instabil wird. Bei festem H_x quellen jetzt ständig weitere Interferenzstreifen niedriger Ordnung herein. Die nulle Ordnung erscheint und wandert, umgeben von höheren Ordnungen, entlang der y -Achse zum Zentrum der Schicht. Dort bildet sich eine Twistwand aus. Kehrt man jetzt die Scherrichtung um, so erreicht man, daß die Schicht auf zwei Seiten vom Rande her instabil wird und der Direktor in die schergünstigere Richtung gedreht wird. Jetzt wandern zwei neue Ringsysteme auf das Zentrum zu. Dort bilden sich vorübergehend zwei weitere Twistwände, die jedoch bald mit der vorhandenen Twistwand zu einer einzigen Wand verschmelzen. Solche irreversiblen Umklappvorgänge lassen sich beliebig oft wiederholen. Wir haben es mit einer typischen Hystereserscheinung zu tun. Diese Hysterese wird bereits durch unseren Näherungsansatz Gl. (19) für kleine ϑ beschrieben. Setzen wir ε aus Gl. (22) in Gl. (23) ein, dann erhalten wir $(v d)$ als Gleichung dritten Grades in ϑ_2 :

$$v d = \frac{1}{\tau} \left(1 - \frac{5}{3} \sigma \right) \vartheta_2 + \frac{5}{3} \frac{\varepsilon}{\tau} \left(1 - \frac{2}{3} \sigma \right) \vartheta_2^3. \quad (27)$$

Bei $\sigma = \sigma_c = (3/5)$ ändert die Anfangssteigung ihr Vorzeichen. Das hieraus bestimmte kritische Feld ist im Vergleich zu dem bekannten

$$H_c = (\pi/d) (K_3/\mu_0 \chi_a)^{1/2}$$

nur um 1,4% kleiner. Von den drei reellen Lösungen für ϑ_2 , die man für $\Delta\sigma = (\sigma - \sigma_c) > 0$ im Bereich

$$(v d)^2 < (v d)_{\max}^2 = \frac{500}{729} \frac{1}{\varepsilon \tau} \frac{\Delta\sigma^3}{(1 - \frac{10}{9} \Delta\sigma)} \quad (28)$$

findet, ist die mittlere instabil. Welcher der beiden stabilen ϑ_2 -Werte angenommen wird, hängt von der Vorgeschichte ab.

Für (m/d) als Funktion von $(v d)$ ergibt sich im überkritischen Bereich eine Schleife, da nach Gl. (20) (m/d) eine gerade Funktion von ϑ_2 ist. Der untere Teil der Schleife geht durch den Nullpunkt und ist der instabile Teil. Er ist in Abb. 3 als gestrichelte Kurve angedeutet. In dieser Abbildung ist einer der stabilen Zweige, für verschiedene Magnetfelder als Parameter, aus experimentellen Daten (entnommen der y -Achse der Interferenzbilder) gewonnen worden. Hierbei wurde Wert darauf gelegt, die Kurven

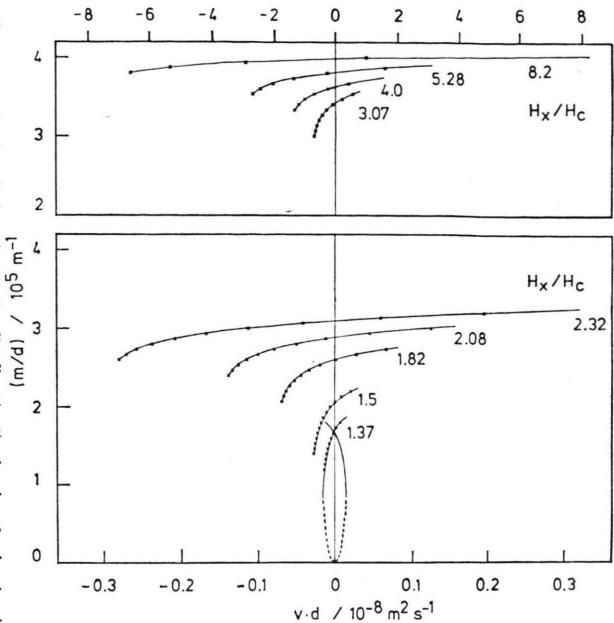


Abb. 3. (m/d) im Bereich größerer $(v d)$ mit überkritischem H_x/H_c als Parameter. Die Meßpunkte bedecken nur einen der beiden stabilen Zweige der Hystereseschleife (für $H_x/H_c = 1,137$ komplett eingezzeichnet; gestauchter Abszissenmaßstab im oberen Teilbild).

für negative $(v d)$ möglichst nahe an $(v d)_{\max}$ heran auszumessen. Dies gelang durch stufenweise langsames Absenken des Magnetfeldes H_x bei konstantem ω , bis die Schicht instabil wurde. Jeweils die letzte noch stabile Interferenz wurde ausgewertet. Zu bemerken bleibt, daß die in Abb. 3 direkt ablesbaren $(v d)_{\max}$ etwas zu klein sind, da die Einfassung der oberen Glasplatte den Randbereich der Scherzelle abdeckt. Außerdem ist der jeweils angegebene (H_x/H_c) -Wert noch etwa 3 bis 5% größer als der, bei dem Instabilität eintritt. Das wurde durch gezielte Messungen ermittelt.

Die so gewonnenen $(v d)_{\max}$ -Werte sind in Abb. 4 als Funktion von $(\Delta\sigma/\sigma_c) = (H_x/H_c)^2 - 1$, mit $\sigma_c = (\pi^2/16)$, doppeltlogarithmisch aufgetragen. Die Wahl der Koordinaten wurde durch die Form der Näherungsgleichung (28) nahegelegt. Dieser Näherung zufolge sollte sich, zumindest für kleine $\Delta\sigma$, eine Gerade der Steigung (2/3) ergeben. Die eingezeichnete Gerade besitzt diese Steigung und paßt sich den Meßpunkten gut an, wenngleich für so große Werte von $(\Delta\sigma/\sigma_c)$ Gl. (28) nicht mehr gelten muß.

Verlassen wir nun die Betrachtung der Hysterese und schauen uns das Verhalten der Twistwand unter der Scherung an. Dazu sei zuvor bemerkt, daß sich

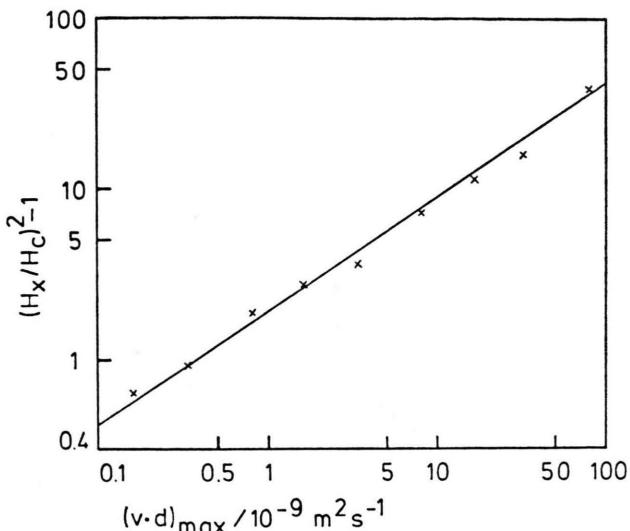


Abb. 4. Doppeltlogarithmische Darstellung von $(H_x/H_c)^2-1$ gegen $(v d)_{\max} / 10^{-9} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$ der Hystereseschleifen aus Abbildung 3. Die Steigung der Geraden beträgt $(2/3)$.

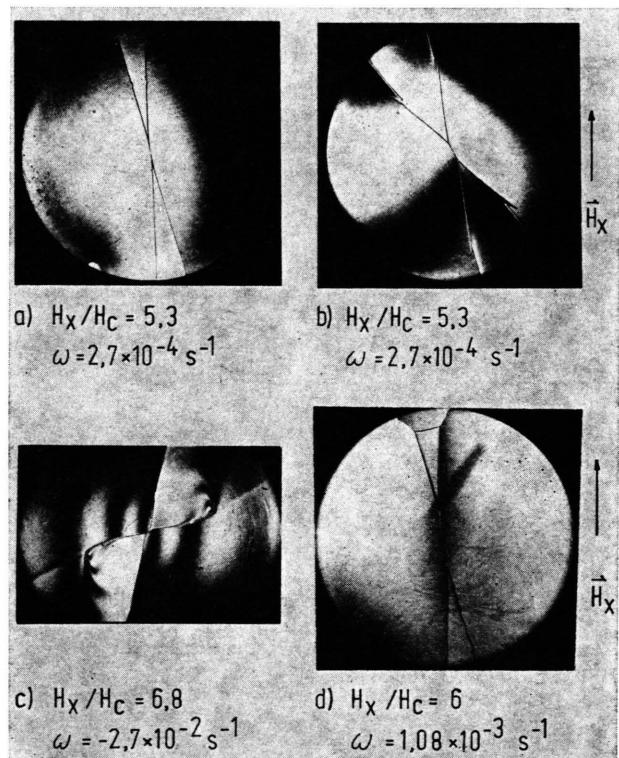


Abb. 5. Deformationsformen der Wand nach Torsionsscherung unterschiedlicher Frequenz ω .

- Kleines ω , nach kurzer Torsionszeit.
- Kleines ω , nach längerer Torsionszeit.
- Sehr großes ω .
- Ausbildung einer neuen Domäne am oberen Rand des Bildes (180° -Inversionswand parallel zu den Grenzflächen der ursprünglich homöotropen Schicht).

eine Twistwand auch bildet, wenn man zuerst schert und dann das Magnetfeld anlegt. Die Twistwand breitet sich dann vom Zentrum her aus und erstreckt sich schließlich parallel zu H_x von Rand zu Rand der Schicht. Im hohen Magnetfeld wird die Wand so dünn, daß sie von den Glasflächen mitgeführt wird. Dadurch wird sie aufgefächert (Abb. 5 a), was zu einer Vergrößerung der gespeicherten elastischen Energie führt. Schließlich treten Instabilitäten der Wand auf, wobei hauptsächlich drei verschiedene Formen beobachtet werden:

- Bei kleineren Winkelgeschwindigkeiten $\omega < 10^{-4} \text{ s}^{-1}$ bilden sich zackenförmige Einschnitte, die sich vertiefen (Abbildung 5 b).
- Bei größeren Winkelgeschwindigkeiten $\omega > 10^{-2} \text{ s}^{-1}$ knickt die vorauselende Begrenzungslinie des Fächers ab (Abbildung 5 c).

In beiden Fällen besitzt das Muster der Wand eine zweizählige Symmetrieachse, die mit der Torsionsachse zusammenfällt. Da die Instabilität gleichzeitig von beiden Seiten hereinläuft, dürfte hier ein zufallsbedingter Keimbildungsprozeß auszuschließen sein.

- Bei sehr hohen Feldstärken $H_x/H_c > 6$ zerreißt die Wand vom Rande her (Abbildung 5 d). Das geschieht auf beiden Bildhälften oft zu recht unterschiedlichen Zeiten, was hier auf einen Keimbildungsprozeß schließen läßt. Die Berandung dieser aufgerissenen Wand ist eine Disklination der Stärke $|m| = 1/2$. Bei diesem Gebiet handelt es sich um eine Splay-Bend-Wand, bei der der Direktor von der einen homöotropen Randlage bis zur anderen um 180° gedreht wird. Diese Wand wird nach dem Abschalten von H_x und ω allein durch die homöotropen Randbedingungen und die Disklination stabilisiert. Ausführliche Untersuchungen über die dynamische Stabilität dieser Domäne unter dem Einfluß eines Scherfeldes bzw. eines Magnetfeldes sind im Gange.

Zum Schluß dieses Kapitels geben wir den Verlauf gemessener $(m/d) - (v d)$ -Kurven für mittlere und größere $(v d)$ auf der y -Achse der Interferenzbilder wieder (Abbildung 6). Die Kurve für $(H_x/H_c) = 1$ hat, wie Gl. (27) verlangt, bei $(v d) = 0$ einen senkrechten Anstieg. Mit wachsendem $(v d)$ streben alle Kurven einem Sättigungswert zu. ϑ nähert sich dem Strömungsgrenzwinkel ϑ_0 . Dieser wird in der ganzen Dicke der Schicht erst vorliegen, wenn $v d$ gegen ∞ strebt. Nach Wahl und Fischer⁵ ergibt sich dann eine Anisotropie von $(m/d)_0 =$

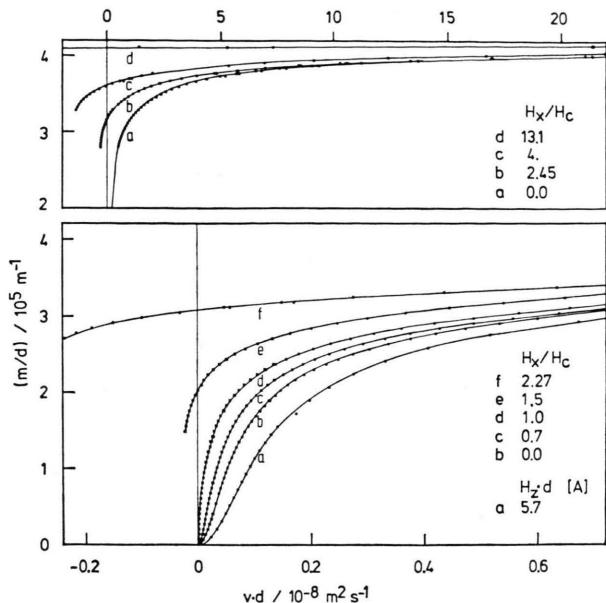


Abb. 6. (m/d) als Funktion sehr großer $(v d)$ mit H_x/H_c bzw. $H_z d$ als Parameter (gestauchter Abszissenmaßstab im oberen Teilbild).

$41,4 \cdot 10^4 \text{ m}^{-1}$. Gelingt es, bereits durch ein starkes Magnetfeld allein eine größere Anisotropie als $(m/d)_0$ zu erzeugen, so sollte bei Scherung mit wachsendem $v d$ die Anisotropie abnehmen. Das heißt, in Abb. 6 wäre eine Kurve mit negativer Steigung zu erwarten. Die dazu nötige Mindestfeldstärke können wir aus eigenen Meßdaten gewinnen.

Bei hinreichend großer Feldstärke H_x darf man annehmen, daß in der ganzen Schicht der Direktor parallel zu H_x ist mit Ausnahme zweier dünner Randschichten von jeweils der Dicke ξ . Dabei ist $\xi = (1/H_x) \cdot (\bar{K}/\mu_0 \chi_a)^{1/2}$ die bekannte magnetische Kohärenzlänge⁷. (ξ/d) ist somit proportional zu $(H_x d)^{-1}$ bzw. zu (H_c/H_x) . Dann sollte für $H_x/H_c \gg 1$ gelten:

$$\frac{m}{d} = \frac{n_\perp - n_{\parallel}}{\lambda} \left(1 - c \frac{H_c}{H_x} \right). \quad (29)$$

Dabei bedeutet c eine von K_3 und K_1 abhängige Konstante. Aus den Abb. 3 und 6 sind für $v d = 0$ gemessene Werte von (m/d) entnommen und in Abb. 7 als Funktion von H_c/H_x aufgetragen. Die an die Meßpunkte für $H_x > 5 H_c$ angepaßte Gerade schneidet die Ordinate bei $(m/d)_{\max} = (n_\perp - n_{\parallel})/\lambda = (43 \pm 0,5) \cdot 10^4 \text{ m}^{-1}$, in guter Übereinstimmung mit dem aus der Literatur¹¹ erhaltenen Wert von $42,7 \cdot 10^4 \text{ m}^{-1}$.

Aus Abb. 7 entnimmt man, daß zur Überschreitung von $(m/d)_0 = 41,4 \cdot 10^4 \text{ m}^{-1}$ ein $H_x > 17 H_c$ notwendig ist. Bei einer Schichtdicke $d = 0,5 \text{ mm}$ wäre $H_c = 1,2 \cdot 10^4 \text{ A/m}$, so daß bereits ein $H_x > 21 \cdot 10^4 \text{ A/m}$ ausreichen würde, $(m/d)_0$ zu überschreiten.

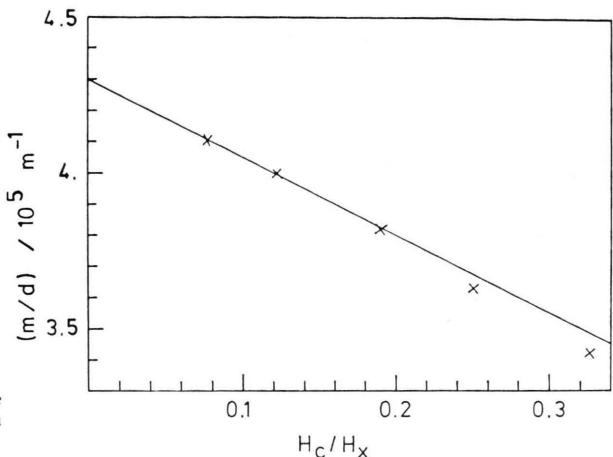


Abb. 7. Linearer Zusammenhang zwischen (m/d) und $(H_c/H_x)^{-1}$ für $(v d) = 0$ im Grenzfall sehr großer (H_x/H_c) .

c) Schiefes Magnetfeld ($H_x, 0, Hz$)

Läßt man auf eine mit konstanter Winkelgeschwindigkeit ω gescherte Schicht ein schiefes Magnetfeld wirken, so werden die Interferenzkreise deformiert und mitsamt der nullten Ordnung senkrecht zu \mathbf{H} aus dem Zentrum der Schicht verschoben (Abbildung 1c). Das Interferenzbild bleibt stationär. Am Ort der nullten Ordnung herrscht exakt die homöotrope Orientierung. Das bedeutet, daß dort $\mathbf{I}^d = 0$ ist. Somit vereinfacht sich die Gl. (9) auf die Form:

$$-H_x H_z = \frac{1}{2} \frac{(\lambda_2 - \lambda_1)}{\mu_0 \chi_a} \frac{v_0}{d}. \quad (30)$$

Hierbei ist $(1/2) \cdot (\lambda_2 - \lambda_1) = -\alpha_2 = \varkappa_1$ eine Torsionsviskosität und $v_0 = (\omega r)$ die Schergeschwindigkeit am Ort der nullten Ordnung.

In Abb. 8 ist aus mehreren Interferenzbildern $(-H_x H_z)$ gegen (v_0/d) aufgetragen. Aus der Steigung der Geraden durch die Meßpunkte bestimmt man die Konstante

$$(\lambda_2 - \lambda_1)/\mu_0 \chi_a = (11,7 \pm 0,4) \cdot 10^{10} \text{ A}^2 \text{ m}^{-2} \text{ s}.$$

In Gl. (30) kommen die Brechungsindizes n_{\parallel} und n_{\perp} nicht vor, die bei optischen Meßverfahren leicht

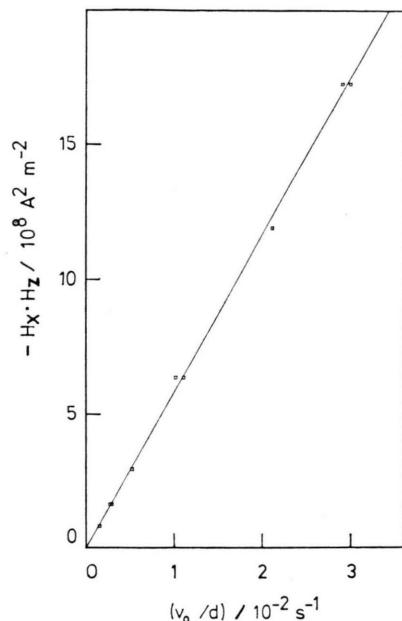


Abb. 8. Torsionsscherung im schiefen Magnetfeld ($H_x, 0, H_z$) zur Bestimmung von $-(\lambda_2/\mu_0 \chi_a)$ aus der Steigung der Geraden. v_0 = Schergeschwindigkeit am Ort der nullten Interferenzordnung.

eine große Fehlerquelle bilden. Deshalb ist die im schiefen Magnetfeld gemessene Konstante $(\lambda_2 - \lambda_1)/\mu_0 \chi_a$ genauer als diejenige, die man aus den in § 4 a) gemessenen Konstanten zu $(\lambda_2 - \lambda_1)/\mu_0 \chi_a = (11,3 \pm 0,8) \cdot 10^{10} \text{ A}^2 \text{ m}^{-2} \text{ s}$ bestimmt, ohne den Fehler von den Brechungssindizes zu berücksichtigen.

Erhöht man bei konstantem H_x und H_z die Winkegeschwindigkeit, so rückt die nullte Ordnung gemäß Gl. (30) näher zum Zentrum der Schicht. Der nullten Ordnung folgt ein Sattelpunkt der Interferenzstreifen. Hinter dem Sattelpunkt nimmt die Anisotropie wieder ab. Dort ist in der Mitte der Schicht der Direktor um über 90° gegen die homöotrope Ausgangsorientierung verdreht. Der Versuch den Direktor über 180° zu verdrehen, führt zur Instabilität. Vom Randpunkt mit der größten Verdrehung des Direktors wächst ein keilförmiger Be-

reich in Richtung zur Mitte. Nach Abschalten von Scherung und Magnetfeld bleiben vorübergehend Disklinationen am Rande des Keils zurück, während der Bereich des Keils samt der übrigen Schicht in den homöotropen Zustand relaxiert sind.

§ 5 Zusammenfassung

Die Methode der Torsionsscherung homöotroper nematischer Schichten hat sich auch im Verbund mit magnetischen Feldern als ein brauchbares Verfahren zur quantitativen Bestimmung gewisser Verhältnisse von elastischen Konstanten, Viskositätskonstanten sowie der magnetischen Anisotropie erwiesen. Es lassen sich K_1/K_3 , λ_1/λ_2 , $(\lambda_2 - \lambda_1)/K_3$, $K_3/\mu_0 \chi_a$ sowie $(\lambda_2 - \lambda_1)/\mu_0 \chi_a$ direkt ermitteln. Die letzte Größe erhält man ohne Kenntnis der Brechzahlen.

Außerdem gestattet die Torsionsscherung durch die unmittelbare Wiedergabe der ortsabhängigen optischen Anisotropie und ihrer Beeinflussung durch äußere Felder einen schnellen Einblick in die qualitativen Verhältnisse der elastischen Deformationen. Besondere Deformationsformen, wie magnetische Wände, werden leicht erkannt. Zeitliche Veränderungen, wie Hystereseprozesse oder die Entstehung von Disklinationen, werden sichtbar gemacht. Die mit den Disklinationen erzeugten neuen Domänen mit einer elastischen Verspannung bereits im ungescherten Zustand (bei untermittlichem Feld) können ebenfalls durch Torsionsscherung im Magnetfeld untersucht werden. In diesen Domänen dreht sich der Direktor um 180° zwischen den nach wie vor homöotropen Grenzflächen der Schicht. Hierbei ist die Projektion des Direktors in die Schichtebene zunächst frei wählbar analog dem C-Direktor in Smektisch-C-Phasen⁷. Der Vorteil dieser nematischen Domänen gegenüber Smektisch-C-Phasen mit Schichten parallel zu den Grenzflächen ist, daß wegen der homöotropen Randbedingung jegliche Vorengesetzte Orientierung des C-Direktors ausgeschlossen ist.

¹ I. Haller, IBM Research (1972).

² M. Miesowicz, Nature London **158**, 27 [1946].

³ Ch. Gähwiller, Phys. Letters **36 A**, 311 [1971].

⁴ Ch. Gähwiller, Mol. Cryst. Liq. Cryst. **20**, 301 [1973].

⁵ J. Wahl u. F. Fischer, Mol. Cryst. Liq. Cryst. **22**, 359 [1973].

⁶ F. Fischer, J. Wahl u. Th. Waltermann, Ber. Bunsenges. Phys. Chem. **78**, 891 [1974].

⁷ P. G. de Gennes, The Physics of Liquid Crystals, Clarendon Press, Oxford, London 1974. — $\mathbf{\Gamma}^v$ erhält bei uns das entgegengesetzte Vorzeichen von dem bei de Gennes;

denn wir bezeichnen mit $\mathbf{\Gamma}^v$ dasjenige Drehmoment, das durch die Scherung auf den Direktor wirkt und nicht umgekehrt durch den Direktor auf seine Umgebung.

⁸ F. Rondelez u. J. P. Hulin, Sol. St. Comm. **10**, 1009 [1972].

⁹ P. Pieranski, F. Brochard u. E. Guyon, J. Physique **33**, 681 [1972].

¹⁰ C. Williams u. P. E. Cladis, Sol. St. Comm. **10**, 357 [1972].

¹¹ M. Brunet-Germain, C. R. Acad. Sci. Paris (B) **271**, 1075 [1970].